

## محاضرات الدفتر

القسم: كليل - رياضيات السنة: الرابعة المادة: منطق رياضي المحاضرة: الثانية

إذا كان  $(N, \leq)$  مرتبة جزئياً  
 $x \leq y \iff x \mid y$

مثال 1-

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$$

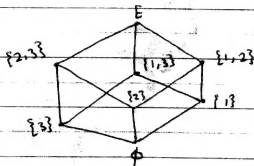
لنعرف على هذه المجموعة علاقة  $\leq$  أي

$$A \leq B \iff A \subseteq B$$

انتم سبقت في الفيد - متعلقة. وبذلك هي علاقة ترتيبية  
 $(P(E), \leq)$  م. م. م. 2

$\{1, 2\}$  غير متعلقة بغير متعلقين

ارسم مخطط هاز لهذه المجموعة المرتبة جزئياً.



مثال 2-

لتكن لدينا

$$X = \{a, a\}$$

$$P = \{\emptyset, \{a, \}\}$$

$$Q = \{\emptyset, \{a, \}\}$$

ولنعرف على  $P \times Q$

$$(a, b) \leq (a, b) \iff a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$$

والطبيعي

ارسم  $P \times Q$  وادرس  $(P \times Q, \leq)$  جزئياً ثم ارسم مخطط هاز لها

$$P \times Q = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a, \}), (\{a, \}, \emptyset), (\{a, \}, \{a, \})\}$$

# محاضرات الدفتر

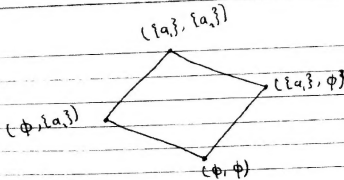
المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

علامة ترتيبية جزئية .



العناصر الأصغر والعناصر الأعظم

تعريف 1 -

لتكن  $(E, \leq)$  م.م. 2. عندئذ فإن :

(1) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصر  $m$  وحيث أنه :

$$\forall x \in E : x \leq m$$

فإن  $m$  وسمي عنصراً أكبر في  $E$  وبالرمز  $\max E$ .

(2) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصر  $p$  بحيث يحقق :

$$\forall x \in E : p \leq x$$

نسمي  $p$  عنصراً أصغر للمجموعة  $E$  في المثال السابق  $(\{a, \{a\}\})$

الخصم  $\phi$  ، الأكبر  $E$

في المثال السابق العنصر الأصغر  $(\phi, \phi)$  والعنصر الأكبر  $\{a, \{a\}\}$

تعريف 2 -

إذا كان في  $(E, \leq)$  م.م. 2. عندئذ فإن :

(1) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصر  $m$  وحيث أنه لا يوجد في  $E$  عنصر  $x$  يحقق علاقة :

$$x \neq m \text{ و } m \leq x$$

في هذه الحالة نسمي  $m$  عنصراً أعظمياً في  $E$ .

(2) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصراً  $n$  بحيث أنه لا يوجد في  $E$  عنصراً  $x$

يحقته بالشرط .

$$x \neq n , x \leq n$$

# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

نسمى  $\alpha$  عنصراً أصغرياً في المجموعة  $E$  بمرتبة  $n$ .

إذا كانت  $E$  مجموعة منتهية ومرتبة جزئياً فإنها تحتوي حتماً على عنصر أعظمي واحد على الأقل وكذلك على عنصر أصغري واحد على الأقل.

أمثلة :  
١- إذا كانت  $E$  مجموعة غير منتهية فقد تحتوي على عناصر أصغرية أو أعظمية أو لا تحتوي على أي منها.

٢- إذا كانت  $P$  عنصراً غير متناهياً موائى عنده في المجموعة  $E$  فإن  $P$  هو عنصر أصغري وأعظمي في نفس الوقت.

٣- العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أعظمي فيها والعنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال :

لنأخذ المجموعة التالية :

$$E = \{2, 3, 4, 9\}$$

٢. ثلاثة عناصر.

ما هي العناصر الأعظمية والأصغرية ؟

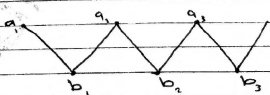
العناصر الأعظمية 4, 9

العناصر الأصغرية 2, 3

ولا يوجد عنده أكبر ولا أصغر.

مثال ١

أوجد العناصر الأعظمية والأصغرية في هذه المجموعة المرتبة جزئياً وفق مخطط هاس.



العناصر الأصغرية  $b_1, b_2, b_3, \dots$

# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$a_1, a_2, a_3, \dots$

العناصر الاعلى

- المجموعات الجزئية المحدودة

تعريف 3-

لنكن  $(E, \leq)$  م.م.ز. ولنكن  $A \subseteq E$  عنصرية عند

(1) - اذا كانت يوجد في  $E$  عنصراً  $s$  بحيث يكون

$$z \leq s ; \forall z \in A$$

في هذه الحالة نسمي  $s$  حداً أعلى للمجموعة  $A$  في  $E$

(2) - واذا كانت يوجد في  $E$  عنصراً  $t$  بحيث يكون

$$t \leq x ; \forall x \in A$$

في هذه الحالة نسمي  $t$  حداً أدنى للمجموعة  $A$  في  $E$

مثال :

$$E = \{2, 3, 4, 9\}$$

جزئية من مجموعة  $(N, \leq)$  م.م.ز. بملامحة العتبة

المحدود الاعلى

$$36t ; t \in \mathbb{Z}^+$$

المحدود الأدنى 1

36 اصغر المحدود، والعليا 1 اكبر المحدود لدينا

تعريف 2-

لنكن  $A$  مجموعة جزئية من  $E$  هي  $(E, \leq)$  نقول عن العنصر  $s \in E$

ان  $s$  هو اعلى  $A$  اذا حققت الشرطان التاليان :

(1)  $s$  هو اعلى  $A$  في  $E$

(2)  $s$  اصغر المحدود، لعليا اي ان  $s$  اذا لم يكن  $s$  هو اعلى  $A$  في  $E$  فإن

$s$  ليس في  $A$ ، بل هو الحد الاعلى لـ  $A$

$$\sup A = s$$

نلاحظ نقول ان العنصر  $t \in E$  هو ادنى اعلى لـ  $A$  في  $E$  اذا حققت الشرطان

التاليان :

# محاضرات الدفتر

القسم :

المادة :

السنة :

الغاضرة :

(1) -  $E$  حد أدنى .

(2) -  $E$  أكبر الحدود الدنيا أي أنه إذا وجد  $E$  حد  $E$  أدنى آخر  $A$  من  $E$  فإن

$$E \leq \inf A \text{ ونكتب } \inf A = E$$

ملاحظة :

ليس من الضروري أن يكون للمجموعة الجزئية  $\sup$  ,  $\inf$

وإذا وجد أي منها فإنه قد يتبين أنه لا ينتمي

بمجموعة

تعريف :

نسب المجموعة مرتبة كلياً مجموعة مرتبة جيداً إذا كانت كل مجموعة جزئية

غير خالية منها تحتوي على عنصر

مثال :

مجموعة الأعداد الطبيعية  $(\mathbb{N}, <)$  تحت علاقة الترتيب الطبيعي هي مجموعة

مرتبة جيداً هي مجموعة الأعداد الصحيحة تحت علاقة الترتيب نفسها

مجموعة غير مرتبة جيداً

مثال :

$(\mathbb{R}, <)$  , ترتيبه طبيعي ونكتب

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$$

$\sup$  ,  $\inf$

$$\sup A = 1$$

$$\inf A = 0$$

استنتج بالحدثة